博弈树，子博弈完美纳什均衡

同时行动博弈：市场进入

		B: 进入	B: 不进入
A	进入	–1, –1	1, 0
	不进入	0, 1	0, 0

这个同时行动博弈有几个纳什均衡?

同时行动博弈：市场进入

		B 进入	B 不进入
A	进入	–1, –1	1, 0
A	不进入	0, 1	0, 0

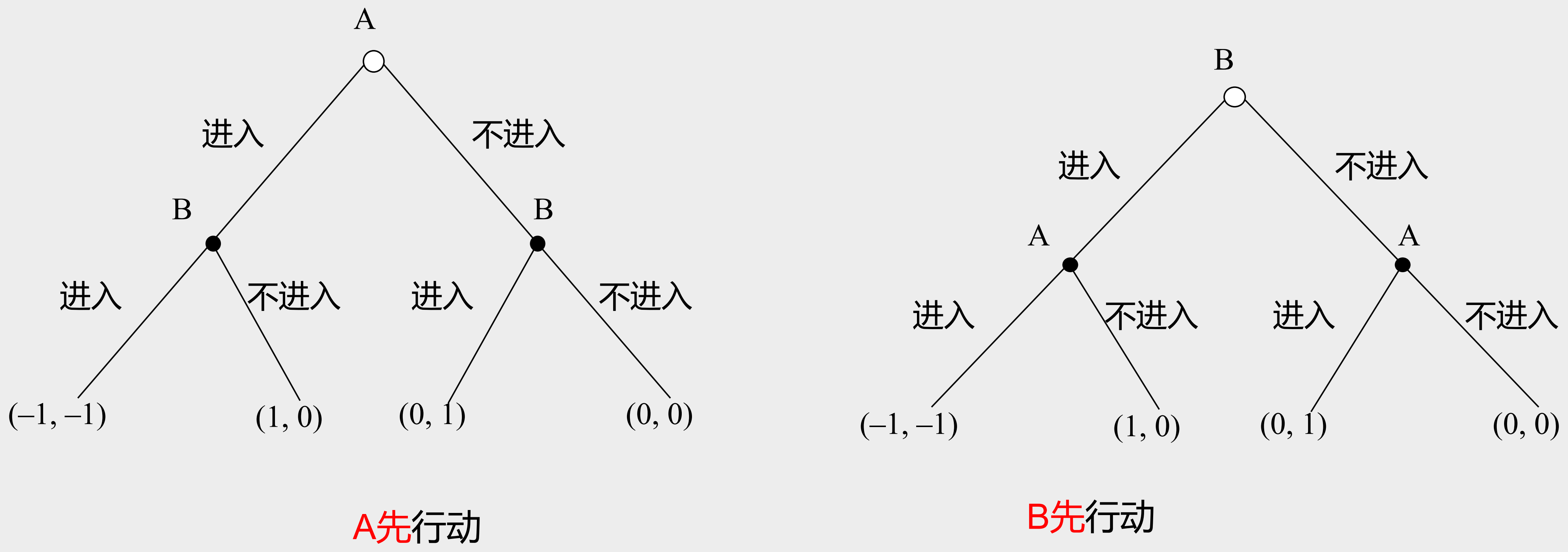
这个同时行动博弈有几个纳什均衡?

两个纯策略均衡: (进入, 不进入) 和 (不进入, 进入)

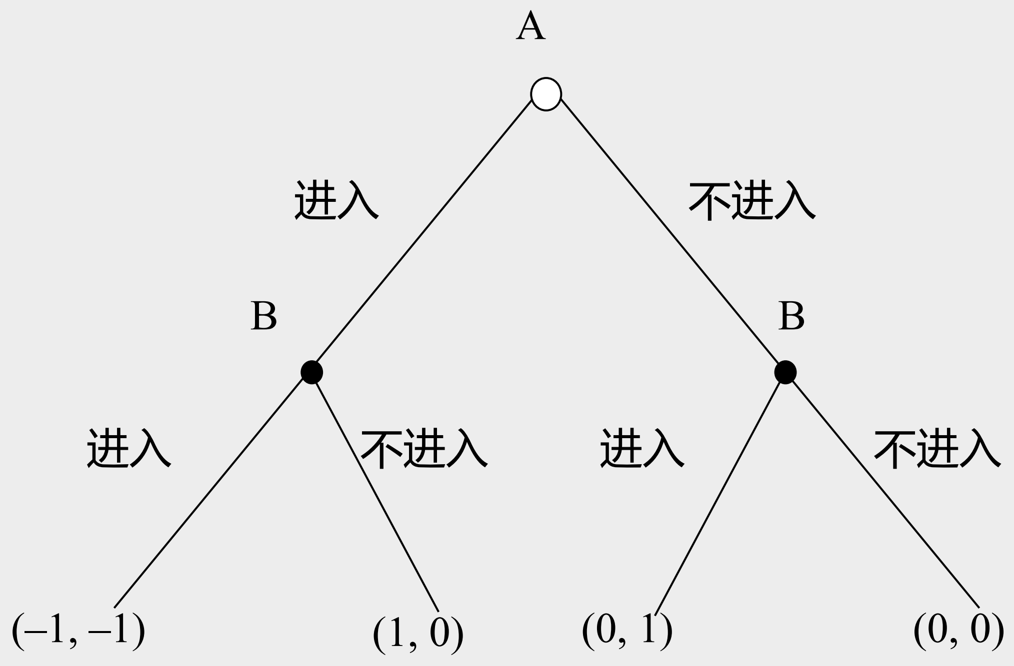
一个混合策略均衡, 其中
- 行为人 A (张三) 的混合策略为 (1/2, 1/2)
- 行为人 B (李四) 的混合策略为 (1/2, 1/2)

从同时行动到先后行动

博弈树



博弈树: 动态博弈的扩展型表示



A先行动

博弈树的三个基本要素: 节点, 分支, 信息集

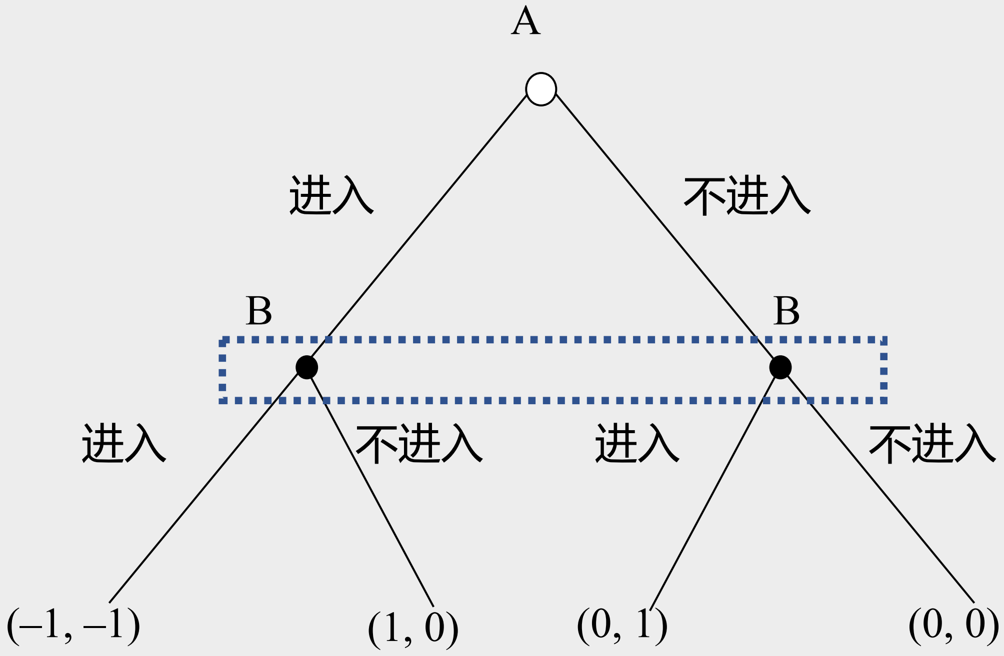
节点 (node)

- 决策节点
- 终端节点（效用）

分支 (branch)

- 每个分支对应行为人的行动
- 决策节点之后存在分支, 终端节点后无分支

同时行动博弈的扩展型表示



同时行动情形

博弈树的三个基本要素: 节点, 分支, 信息集

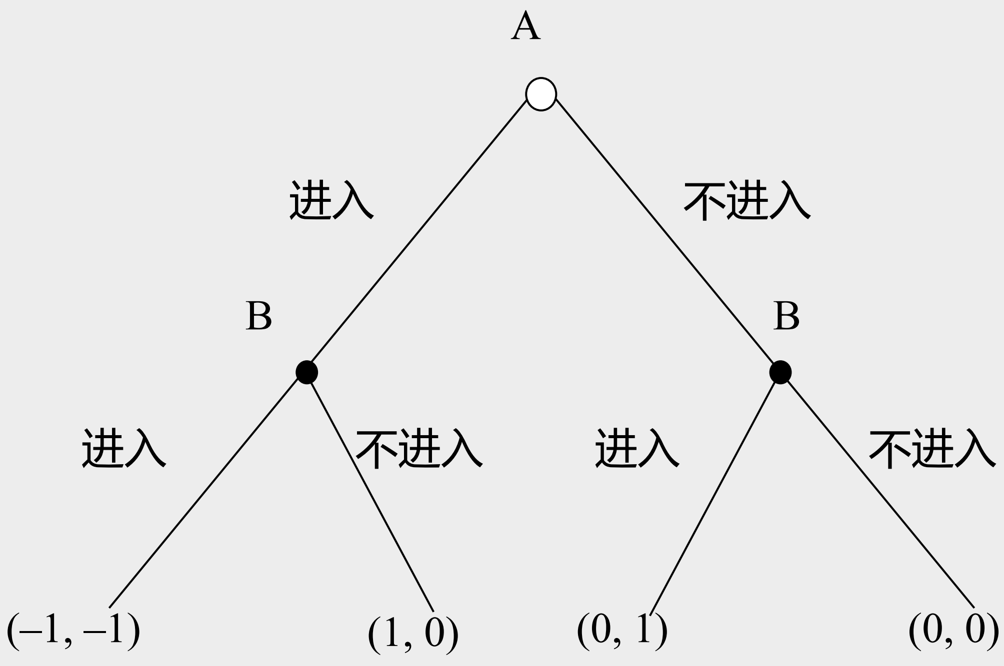
尽管从博弈树来看, 是行为人 A 先做出决策.
但是, 行为人 B 不知道行为人 A 的行动是什么.

我们用虚线把行为人 A 行动后对应的节点圈起来,
称这些节点是行为人 A 的信息集.

- 行为人 B 只知道此时博弈进入到了信息集中的某个节点, 但不知道具体是哪个节点.
- 只有行为人 A 知道此时博弈进行到了哪个节点.

重要的不是物理时间上的先后, 而是信息上的先后.

后手行为人的策略



先后行动情形

参与人 B 的策略: 观察到参与人 A 的行动后,参与人 B 会采取的行动.

参与人 B 的纯策略有四个:

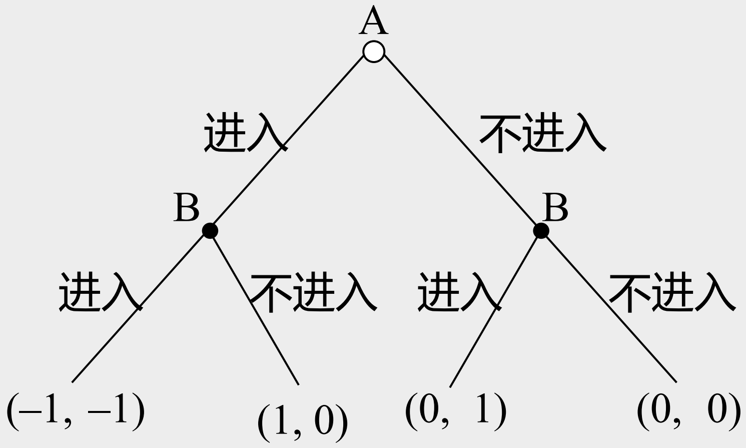
(进入, 进入), (进入, 不进入), (不进入, 进入), (不进入, 不进入)

其中(进入, 进入)的意思是:

- 如果A选择进入, 则我也进入
- 如果A选择不进入, 我还是进入
- 对应的函数 s : s (进入) = 进入, s (不进入) = 进入

扩展式表示 v.s. 策略式表示

扩展式（博弈树）



标准（策略）式

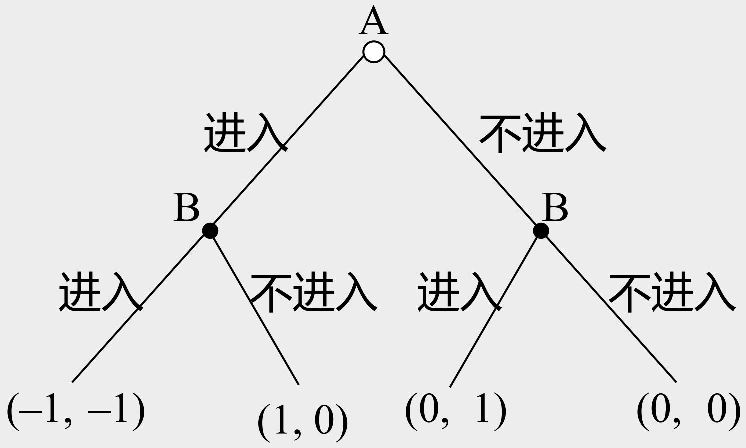
B

		{进入, 进入}	{进入, 不进入}	{不进入, 进入}	{不进入, 不进入}
A	进入	–1, –1	–1, –1	1, 0	1, 0
	不进入	0, 1	0, 0	0, 1	0, 0

请用下划线法找出纯策略纳什均衡, 并和逆向归纳法的结果进行比较.

扩展式表示 v.s. 策略式表示

扩展式（博弈树）



标准（策略）式

B

A		{进入，进入}	{进入，不进入}	{不进入，进入}	{不进入，不进入}
A	进入	–1, –1	–1, –1	1, 0	1, 0
	不进入	0, 1	0, 0	0, 1	0, 0

该博弈有三个纯策略纳什均衡：

1.（进入，（不进入，不进入））

2.（不进入，（进入，进入））

3.（进入，（不进入，进入））

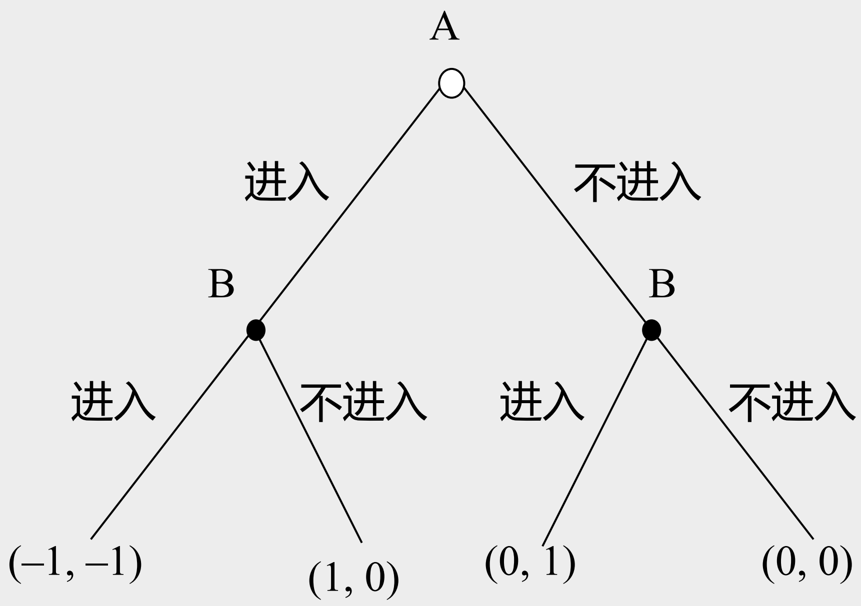
使用逆向归纳法, 只有一个均衡:

- A 的策略: 进入; B 的策略:（不进入，进入）

可信性和纳什均衡

这个纳什均衡有什么问题?

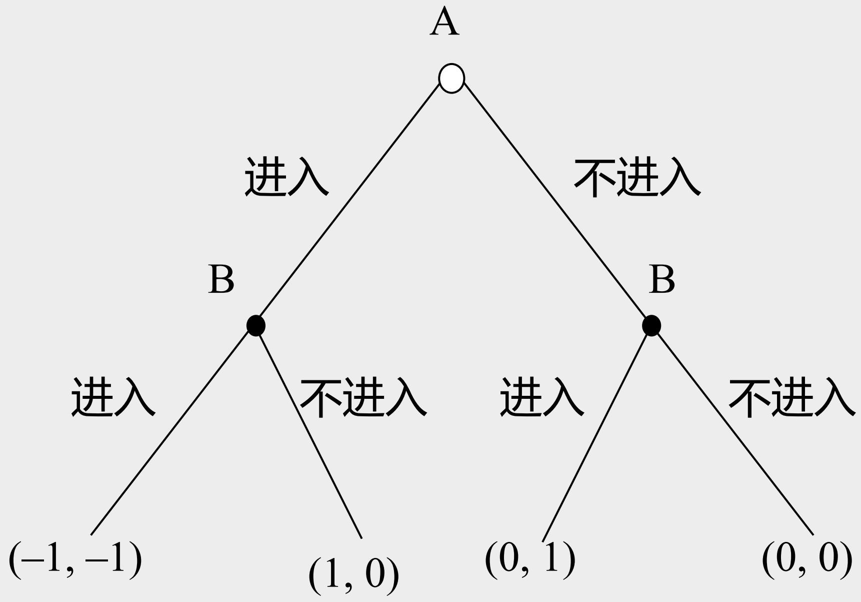
- 行为人 A:　进入
- 行为人 B:（进入，进入）



可信性和纳什均衡

这个纳什均衡有什么问题?

- 行为人 A: 进入
- 行为人 B: (进入 , 进入)



行为人 B 的策略不可信(不可置信的威胁):

- 无论先手 A 如何行动, 我都要进入市场!

但这确实是一个纳什均衡: 如果先手 A 相信后手 B 会这么做, A 不会进入市场. 随后, B 进入市场, “履行了他的承诺” .

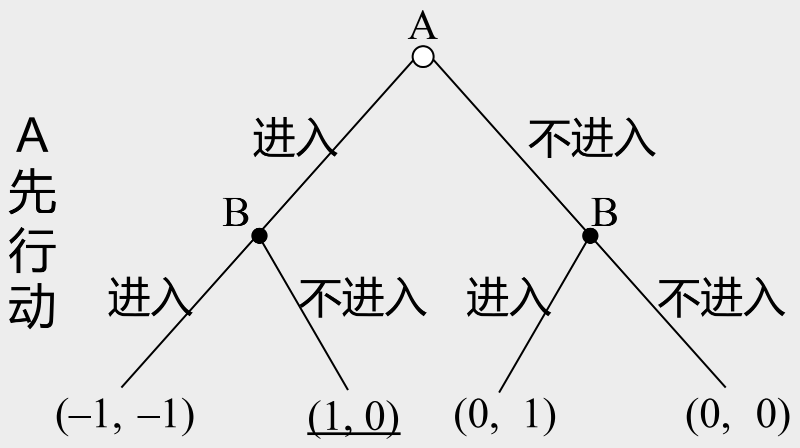
先手 A 无法得知, 如果他进入了市场, 后手 B 会不会履行承诺.

承诺和威胁的可信性

- 在动态博弈中，由于博弈方策略的实施是一个过程，所以过程十分重要，类似于对未来过程的了解，它本身依赖于其它博弈方的行为。那么就存在一个对其博弈方所可能采取策略的可信性问题。博弈方在博弈过程中存在着改变计划的情况，这种问题称为相机选择问题。
- 可信性：动态博弈中先行为的博弈方是否应该相信后行为博弈方会采取某种策略或行为。
- 后行为博弈方将来采取对先行为博弈方有利的行为为“承诺”，采取对先行方不利的行为为“威胁”。

进入市场动态博弈再分析

扩展式（博弈树）→ 标准（策略）式



B

		{进入，进入}	{进入，不进入}	{不进入，进入}	{不进入，不进入}
A	进入	–1, –1	–1, –1	$\underline{1}$, $\underline{0}$	$\underline{1}$, $\underline{0}$
	不进入	$\underline{0}$, $\underline{1}$	$\underline{0}$, 0	0, $\underline{1}$	0, 0

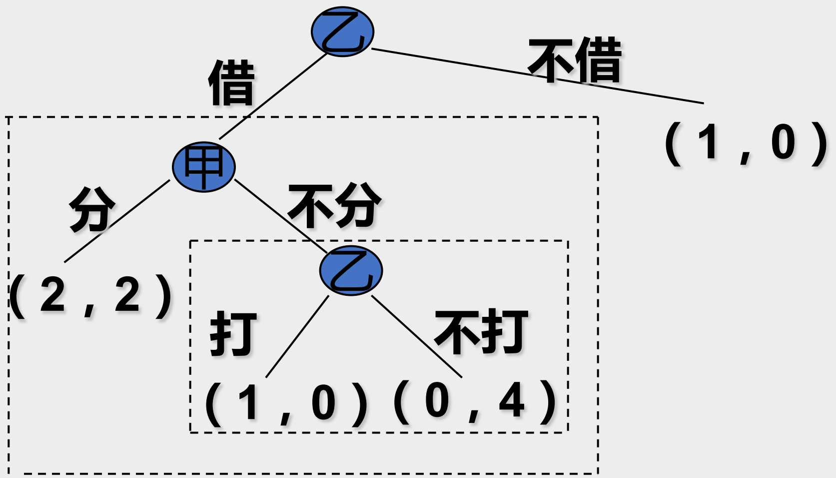
该博弈有三个纳什均衡：

1.（进入，（不进入，不进入））；
2.（不进入，（进入，进入））；
3.（进入，（不进入，进入））。

1.含有不可信的承诺：承诺无论如何都不进入
2.含有不可信的威胁：威胁无论如何都进入
3.合理的纳什均衡

子树和子博弈

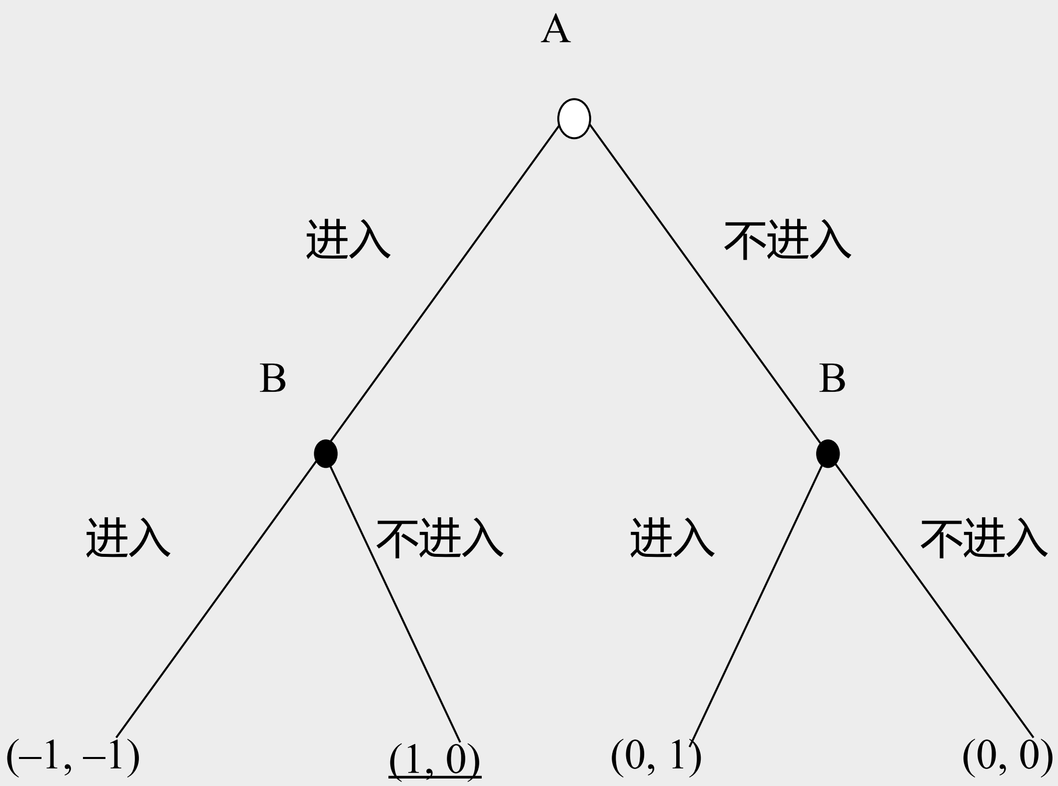
- 子博弈定义：由一个动态博弈第一阶段以外的某阶段开始的后续博弈阶段构成，有初始信息集和进行博弈所需要的全部信息，能够自成一个博弈的原博弈组成部分。



开金矿（信守）——子博弈

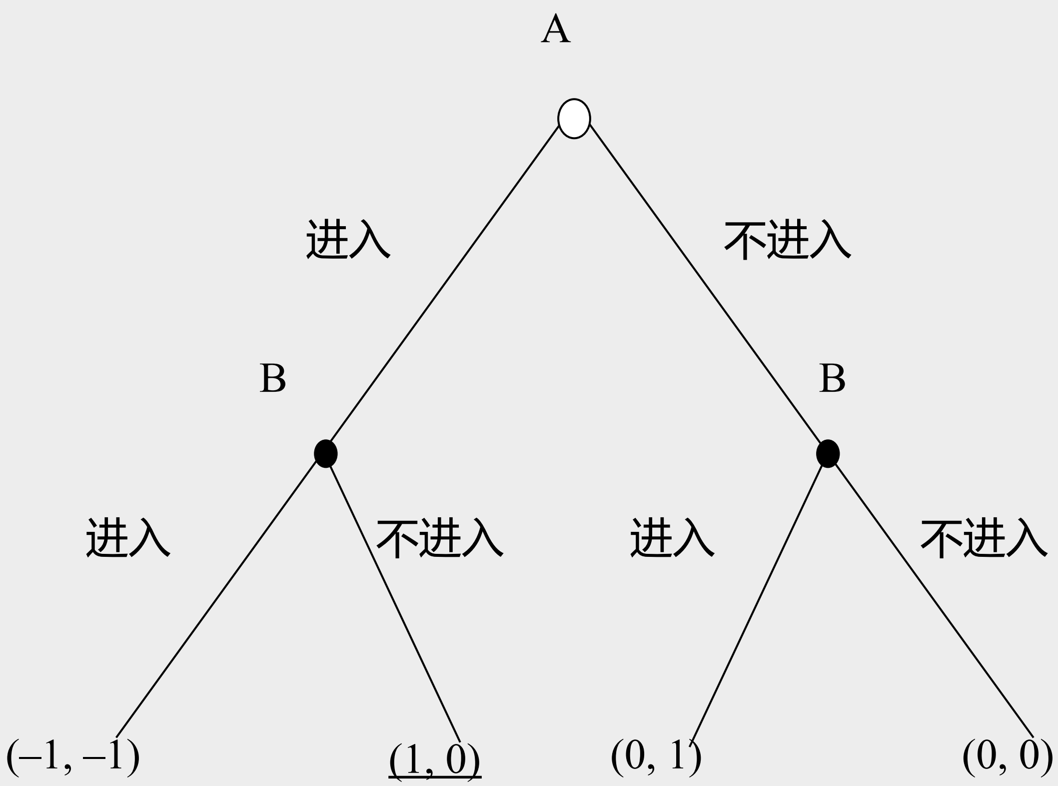
注： 原博弈的初始节点开始的博弈为原博弈本身，不称它为原博弈的子博弈

子博弈练习



- 有几个子博弈?

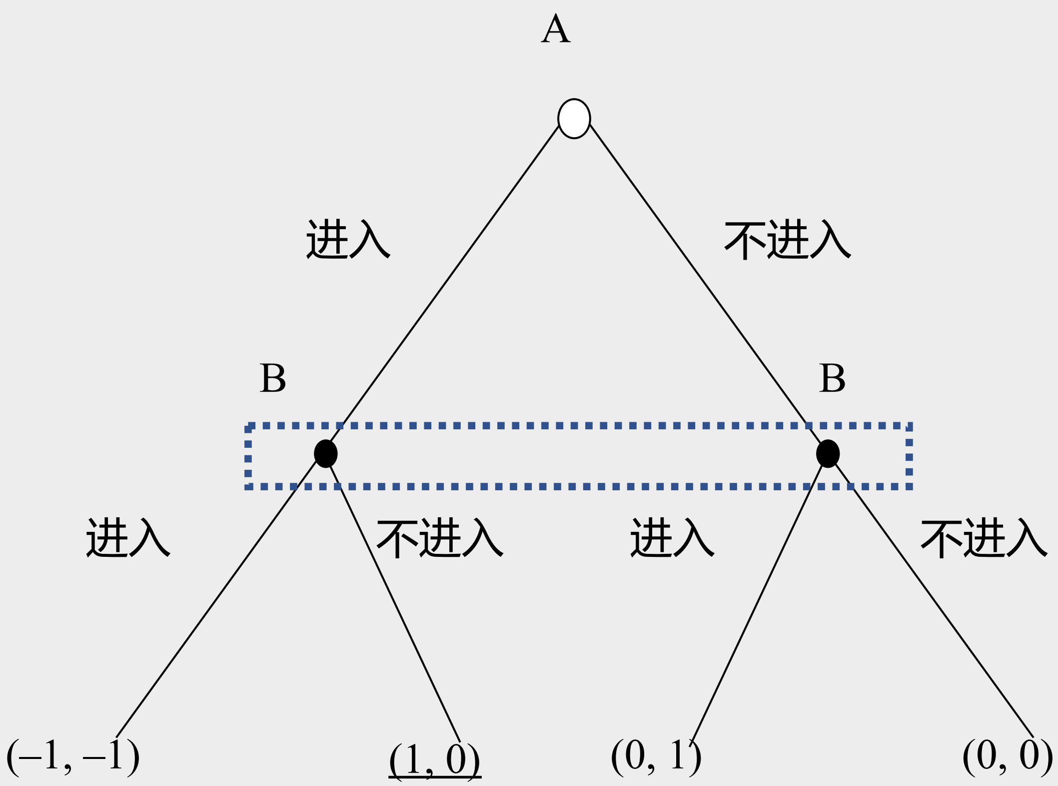
子博弈练习



- 有几个子博弈?

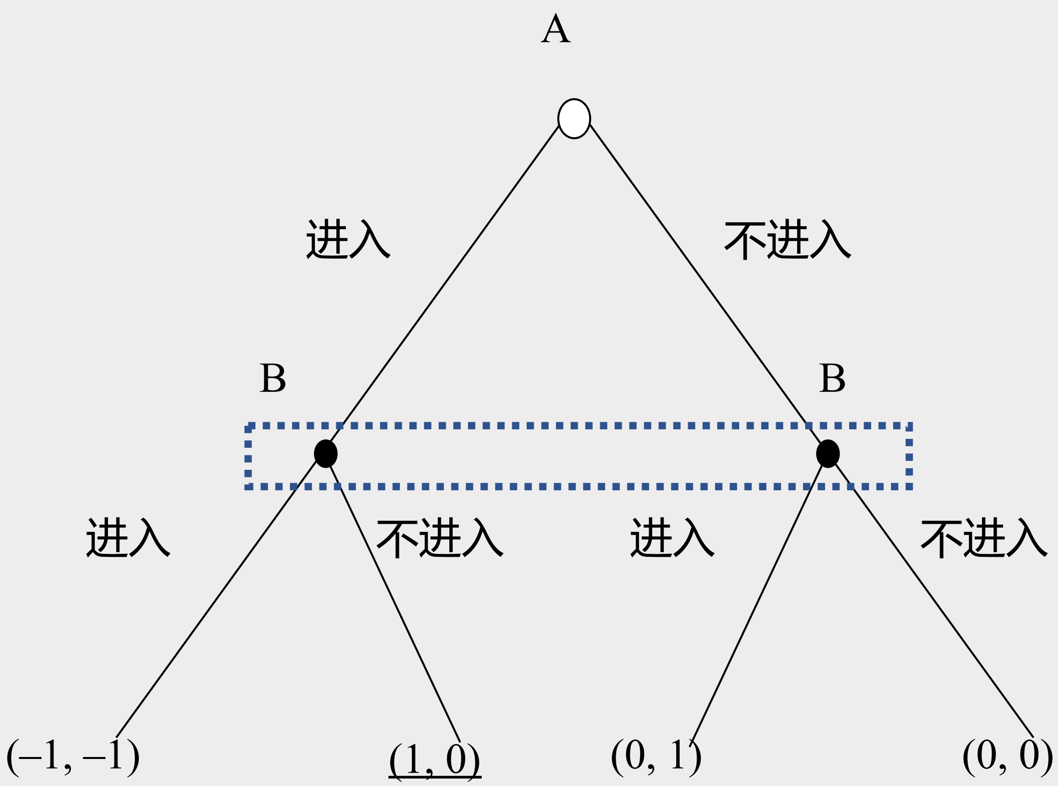
- 有2个子博弈
  - 子博弈 1: A 选择“进入”后的子树
  - 子博弈 2: A 选择“不进入”后的子树

子博弈练习



- 有几个子博弈?

子博弈练习



- 有几个子博弈?
- 0

练习

画出囚徒困境博弈的博弈树。

子博弈完美纳什均衡

- 在动态博弈中由于博弈过程是逐步深入的，这一过程由每个阶段所采取的策略构成，由此引出“路径”的概念。
- 路径：从第一阶段开始通过每阶段一个行为，最后达到博弈结束的一个终端各博弈方的行为组合。

定义：在一个完全且完美信息动态博弈中，各博弈方的策略组合在动态博弈本身和所有子博弈中都构成一个纳什均衡，则称该策略组合为一个“子博弈完美纳什均衡”。

子博弈完美纳什均衡一定是纳什均衡，并且

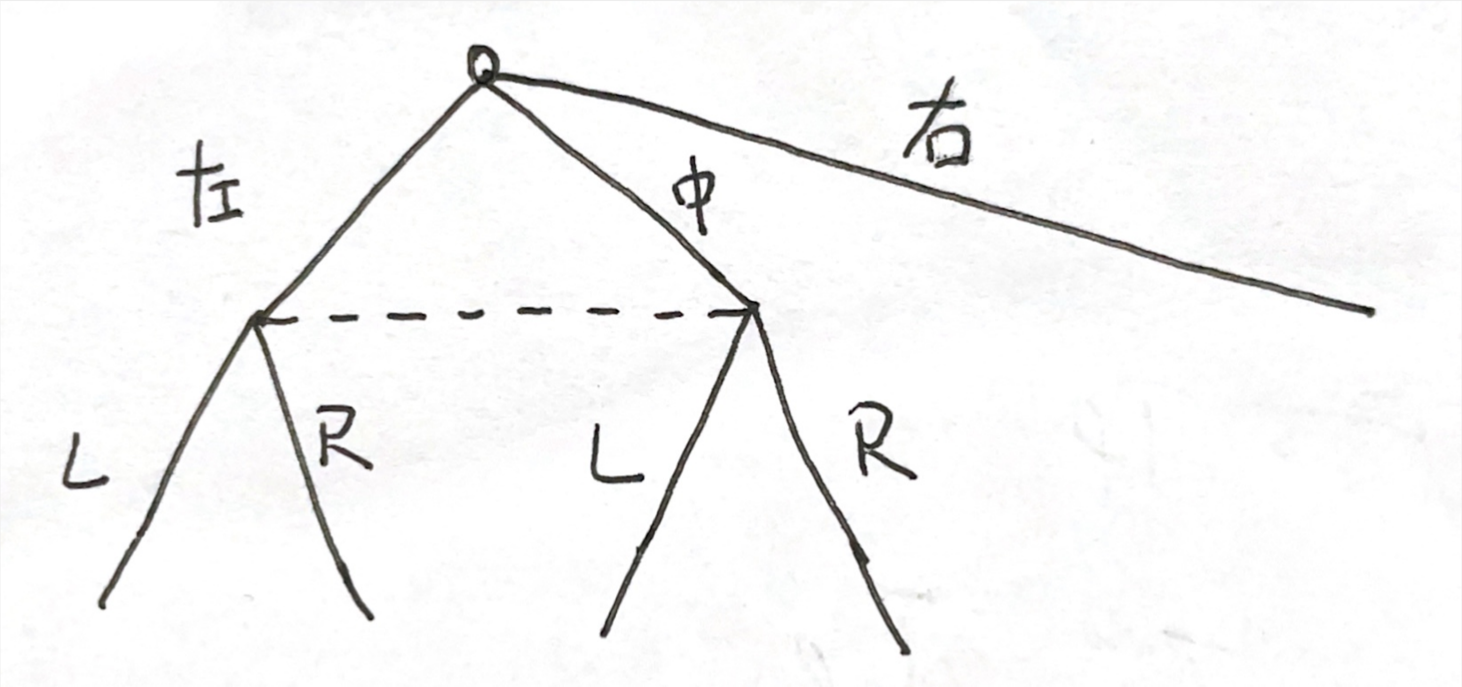
- **不能包含任何的不会信守的许诺或威胁**

逆向归纳法

如何求解子博弈完美纳什均衡? 逆推归纳法

在这门课中, 子博弈完美纳什均衡和逆向归纳解这个概念是等价的. 如果作业或题目让你求解子博弈完美纳什均衡, 你直接使用逆向归纳法即可 (例: 先后定产博弈, 讨价还价博弈, 劳资博弈, 等等)

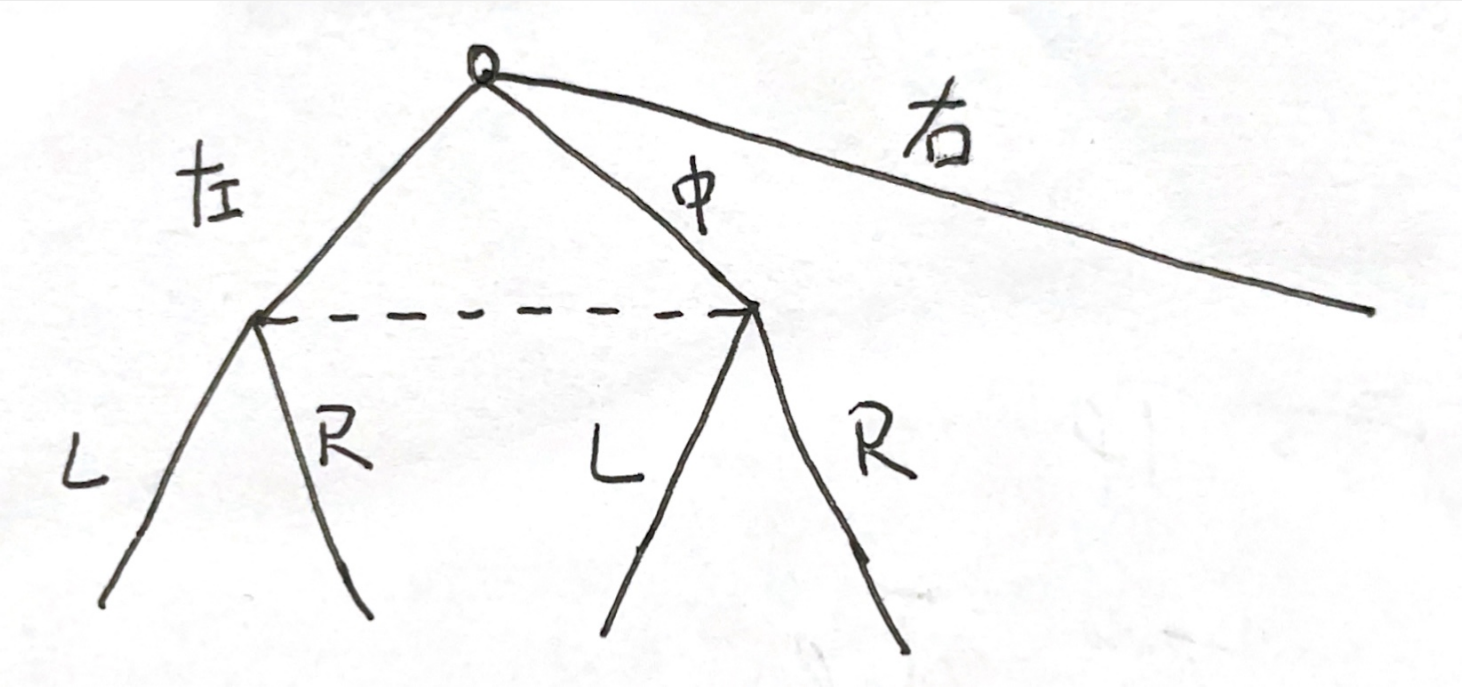
补充说明: 逆向归纳解和子博弈完美均衡不等价



没有子博弈（子博弈精炼法失效）

逆向归纳法仍有效，因为先手有两个信息集。

补充说明: 逆向归纳解和子博弈完美均衡不等价



没有子博弈（子博弈精炼法失效）

逆向归纳法仍有效，因为先手有两个信息集。

练习：给这个博弈例子赋予对应的最终效用，使得最终的纳什均衡多于1个，但逆向归纳解只有1个。

可信的承诺和威胁

这些威胁不可信：

- “如果你不答应我，我就死给你看”
- “嫁给我，以后我什么都听你的”
- “你如果执意跟他结婚，我就跟你断绝父女关系”

如何让其他人相信自己？一个常用的方法是减少自己的可选行动

- 历史上经典威胁：破釜沉舟
- 去图书馆学习，只带课本，不带手机

作为后手，如何让先手相信自己的承诺？一个常用的方法是给先手留下把柄

- 上梁山必须要纳“投名状”
- 张三被歹徒绑架，并且看到了歹徒的脸。歹徒从张三的亲人手中拿到赎金后，张三如何让歹徒放自己安全离开？

3.4 几个经典动态博弈模型

3.4.1 寡占的斯塔克博格模型

3.4.2 劳资博弈

3.4.3 讨价还价博弈

3.4.4 委托人—代理人理论（自行看书学习，教师不作要求。同学们简单了解即可）

练习: 有同时选择的动态博弈模型

- 市场上有三家钢铁厂: 张三, 李四和王五. 博弈一共有两个阶段:
  - 张三选择钢铁产量 q_1
  - 李四和王五观察到张三的产量 q_1 后, 同时选择产量 q_2 和 q_3.
- 已知市场需求为 $p = q_0 - q$, 其中 $q = q_1 + q_2 + q_3$ 为总产量, $q_0 > 0$ 为给定常数. 求解这个动态博弈的纯策略子博弈完美纳什均衡.

给定第一期张三的产量 $q_1 \in [0, q_0]$, 李四和王五在第二阶段的博弈为同时定产的古诺博弈, 其中市场需求为 $p = (q_0 - q_1) - q_2 - q_3$.

李四的最优反应函数:

$$q_2^*(q_3) = (q_0 - q_1 - q_3)/2$$

王五的最优反应函数:

$$q_3^*(q_2) = (q_0 - q_1 - q_2)/2$$

联立可得, 李四和王五在第二阶段的均衡产量为

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \frac{q_0 - q_1}{3}$$

给定李四和王五的产量 $(\bar{q}_2, \bar{q}_3)$, 张三在第一阶段的最优化问题为:

$$\max_{q_1} (q_0 - q_1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3) q_1 = (q_0 - q_1) q_1 / 3$$

由一阶条件, 这个最优化问题的解为 $\bar{q}_1 = q_0/2$.

综上, 这个博弈的均衡如下:

张三在第一期的策略: $\overline{q}_1 = q_0/2$

李四的策略: $\overline{q}_2(q_1) = \frac{q_0-q_1}{3}$

王五的策略: $\overline{q}_3(q_1) = \frac{q_0-q_1}{3}$

3.5.2 间接融资和挤兑风险

设一家银行为了给一个企业贷放一笔20000元的贷款，以20%的年利率吸引客户的存款。若两个客户各有10000元资金，如果他们把资金作为1年期定期存款存入该银行，那么银行就可以向企业贷款；如果两客户都不愿存款或只有一个客户存款，那么银行就无法结上述企业贷款，这时候客户都能保住自己的本全。

		客户2	
		不存	存款
客户1	不存	1，1	1，1
	存款	1，1	下一阶段

第一阶段

		客户2	
		提前	到期
客户1	提前	0.8，0.8	1，0.6
	到期	0.6，1	1.2，1.2

第二阶段

3.5.2 间接融资和挤兑风险

如果第二阶段理想的结果（到期，到期）纳什均衡，结果如图。

此时有两个纳什均衡，后一个帕累托优于前一个，也是上策均衡和风险上策均衡。

（到期，到期）→（存款，存款）

客户2

客户1	不存	存款
不存	1，1	1，1
存款	1，1	1.2，1.2

第一阶段

客户2

客户1	提前	到期
提前	0.8，0.8	1，0.6
到期	0.6，1	1.2，1.2

第二阶段

3.5.2 间接融资和挤兑风险

如果第二阶段不理想的结果（提前，提前）纳什均衡，结果如图，

此时，（不存，不存）是纳什均衡，也是上策均衡。

（提前，提前）→（不存，不存）

客户2

客户1	不存	存款
不存	1，1	1，1
存款	1，1	0.8，0.8

第一阶段

客户2

客户1	提前	到期
提前	0.8，0.8	1，0.6
到期	0.6，1	1.2，1.2

第二阶段

3.5.2 间接融资和挤兑风险

- 事实上，绝大多数银行挤兑都发生在传闻银行经营不好有可能破产的时候，一旦破产，储户的存款就有可能遭受严重损失。所以，银行一定要注意良好的经营业绩，还要掌握相当比例的备用金。
- 现代更容易引发金融、社会风险的主要是不正规的非法金融活动，如地下钱庄和非法集资等。因为非法金融活动常常通过恶意欺骗的手段吸引人们参加，用借新债还旧债的方法，而不是经营利润偿还到期资金，信用差、管理差而且缺乏保险措施，引起金融 。

3.5.3 国际竞争和最优关税

- 假设两个国家各有一个企业生产既内销又出口的相互竞争的商品，我们称他们为企业1和企业2。两国的消费者分别在各自国内的市场上购买企业1或企业2的产品。

- 两国各自决定关税水平，然后企业各自决定内销与出口产品数量

- 用Q_i记在国家i市场上的商品总量，则市场出清价格P_i为Q_i的函数$P_i = P_i(Qi) = a - Qi$，$i = 1,2$。企业i生产数量为hi的产品供内销，数量为e_i的产品供出口，因此$Q_i = h_i + ej$，$i, j = 1,2$。当$i = 1$时，$j = 2$；当$i = 2$时，$j = 1$。

- 再设两企业的边际产生成本同为常数c，且无固定成本，则企业i的生产总成本为$c(h_i + ei)$。当企业出口时，因为进口国征收的关税也计入成本，设国家j的关税为t_j时，企业i的出口产品成本为（$c + t_j$）e_i，因此企业i的总成本为$c(h_i + ei) + t_j e_i$。以此假设构造一个两阶段都有同时选择的四方动态博弈。

3.5.3 国际竞争和最优关税

厂商的得益函数为：
$$\pi_i = \pi_i(t_i, t_j, h_i, h_j, e_i, e_j)$$
$$= [a-(h_i+e_j)]h_i + [a-(e_i+h_j)]e_i - c(h_i+e_i) - t_j e_i$$
$$= h_i[a-(h_i+e_j)-c] + e_i[a-(e_i+h_j)-c-t_j]$$

第二阶段厂商选择：

$$\max \pi_i(t_i, t_j, h_i, h_j, e_i, e_j)$$
$$h_i^* = \frac{a-c+t_i}{3}, e_i^* = \frac{a-c-2t_j}{3}$$

思考

1.假设t_1和t_2等于0时如何？

2.关税有何作用？

3.5.3 国际竞争和最优关税

结论 1 ：

从这一结果可以看出来，如果国家提高进口关税，可以使本国企业的国内产量提高而进口量下降。这说明国家能通过关税保护国内市场，限制外国产品的进入。这是世界各国普遍设置关税并想提高本国关税的主要原因。

3.5.3 国际竞争和最优关税

第一阶段政府选择：先把第二阶段根据厂商选择得到结果代入政府得益，再求最优化：

政府的得益函数：

$$w_i = w_i(t_i, t_j, h_i, h_j, e_i, e_j) = \frac{1}{2}(h_i + e_j)^2 + \pi_i + t_i e_j$$

$$\max w_i(t_i, t_j^*)$$

$$w_i(t_i, t_j^*) = \frac{[2(a-c)-t_i]^2}{18} + \frac{(a-c+t_i)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_j^*)^2}{9} + \frac{t_i(a-c+t_i)}{3}$$

$$t_i^* = \frac{a-c}{3}$$

$$h_i^* = \frac{4(a-c)}{9}$$

$$e_i^* = \frac{a-c}{9}, i = 1,2$$

3.5.3 国际竞争和最优关税

结论2：

此结果说明，在两国自由博弈，即没有贸易协定的情况下，政府会制定$t1 = t2 = (a-c)/3$的关税税率以获得最大的社会福利；而企业则会内销$hi = 4(a-c)/9$，外销$ei = (a-c)/9$的产品以获得最大的企业利润。

此时，企业利润 $\pi_i = \frac{17(a-c)^2}{81}$ ，社会总福利为 $w_i = \frac{5(a-c)^2}{18}$ 。

3.5.4 工资奖金制度

在存在雇员相互竞争的前提下，雇主通过雇员进行竞赛的方法实现有效激励的博弈模型

模型假设：

1.雇员$i(i=1,2)$的产出函数 $y_i = e_i + \varepsilon_i$

e_i 为雇员努力水平，负效用函数为 $g(e)$且 $g'>0, g''>0$ 。

$f(\varepsilon)$为随机扰动，服从分布密度 ε_i ，均值为0的分布。

2.产量高的雇员得到高工资 w_h ，产量低的得到低工资 w_l 。

3.两雇员在已知雇主宣布的工资奖金制度下，同时独立选择各自的努力程度。

很显然，这个博弈模型是一个两阶段有同时选择的动态博弈模型，雇主决定 w_h 和 w_l 是这个博弈的第一阶段，两雇员在知道雇主定的工资标准以后同时选择努力程度 e_i 是第二阶段。

3.5.4 工资奖金制度

- 通过分析，雇员的得益为 $u(w,e)=w-g(e)$ 　其中 $g(e)>0$
- 雇主追求利润最大化，得益为： $y_1+y_2-w_h-w_l$
- 用逆推归纳法，先考虑第二阶段雇员的选择。对任意风险中性雇员来说，每个雇员的纳什均衡策略，就是给定对方的选择，自己选择的努力程度一定要使自己的期望最大化。对任意，必须是下列最大问题的解：

$$\max_{e_i\geq 0}[w_h \bullet p\{y_i(e_i)>y_j(e_j^*)\}+w_l \bullet p\{y_i(e_i)\leq y_j(e_j^*)\}-g(e_i)]$$

$$=\max_{e_i\geq 0}[(w_h-w_l)\bullet p\{y_i(e_i)>y_j(e_j^*)\}+w_l-g(e_i)]$$

$y_i=e_i+\varepsilon_i$ ，$i=1,2$，$p\{\ldots\}$表示括号中不等式成立的概率。

根据最大化问题的一阶条件，可得：

$$(w_h-w_l)\frac{\partial p\{y_i(e_i)>y_j(e_j^*)\}}{\partial e_i}=g'(e_i)$$

这是雇员所选择努力程度必须满足的基本条件。

3.5.4 工资奖金制度

$$P\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\} = P\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i\}$$

$$= \int_{\varepsilon_j} P\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i \mid \varepsilon_j\} f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$

$$= \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j^* + \varepsilon_j - e_i)] f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$

代入得： $(w_h - w_l)\int_{\varepsilon_j} f(e_j^* + \varepsilon_j - e_i) f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e_i)$

两雇员情况一样，对努力程度的选择也相同，即：$e_1^* = e_2^* = e^*$，这样就得到：

$$(w_h - w_l)\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e^*)$$

- 这就是两雇员之间静态博弈的纳什均衡，也就是他们在给定工资、奖金水平下的最优努力水平决定公式。如果我们进一步给出产出函数中随机项的具体分布，以及两雇员努力负效用函数的具体形式，那么就可以从上式中解出两雇员的具体选样。

雇主选择

由于雇员之间博弈的均衡是对称均衡，因此双方赢得竞赛的机会都是0.5，假设雇员能得到其他工作机会提供的得益是 U_a ，则保证雇员接受工作的基本条件是：

$$\frac{1}{2}w_h+\frac{1}{2}w_l-g(e^*)\geq U_a$$

此即“参与约束”。

由于在雇员接受工作的前提下，雇主必然尽可能压低工资，因此约束条件可取等号：

$$\frac{1}{2}w_h+\frac{1}{2}w_l-g(e^*)=U_a$$

于是得到：

$$w_h+w_l=2g(e^*)+2U_a,$$

设上述参与约束条件满足，雇主的利润函数为

$$y_1+y_2-w_h-w_l=2e^*+\varepsilon_1+\varepsilon_2-w_h-w_l$$

3.5.4 工资奖金制度

雇主的期望利润为 $2e^* - w_h - w_l$，因此雇主有如下的最优化问题：

$$\max_{w_h > w_l > 0}\{2e^* - w_h - w_l\}$$

上述雇主决策可转化为促使雇员的努力程度满足： $\max_{e^* > 0}\{2e^* - 2U_a - 2g(e^*)\}$

雇主利润最大化要求的雇员努力程度的一阶条件为： $1 - g'(e^*) = 0$

代入两雇员的最优努力水平决定公式得到： $(w_h - w_l)\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j)d\varepsilon_j = 1$

$$(w_h - w_l) = 1\Big/\int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j)d\varepsilon_j$$

该式的意义是具有有效激励作用，从符合雇主利益的奖金水平，只与工作成绩的不确定性有关。

逆向归纳法的局限性

有限期囚徒困境

张三和李四连续进行三轮囚徒困境博弈。

- 每一轮张三选择“合作”或“不合作”。
- 在单期博弈中，“合作”是严格劣势策略。

博弈进行方式如下：

- 第一阶段：双方同时选择“合作”或“不合作”
- 第二阶段：看到上一轮的结果后，双方同时选择“合作”或“不合作”
- 第三阶段：看到上一轮的结果后，双方同时选择“合作”或“不合作”

问：

- 如果你是张三，你会在第一轮选择“合作”么？
- 如果这个博弈进行10轮呢？进行100轮呢？

有限期囚徒困境

- 博弈进行到最后一期时，前期的所有收益可以视为“沉没成本”。理性参与人在最后一期会选择“不合作”
- 给定最后一期选择“不合作”，理性参与人在倒数第二期也会选择不合作。
- 给定最后两期都选择“不合作”，理性参与人在倒数第三期也会选择不合作。
- ……
- 由逆向归纳法可知：无论博弈进行多少期，理性参与人永远都会选择不合作。

问：你觉得这个预测“合理”么？

3.6.1 逆推归纳法的问题

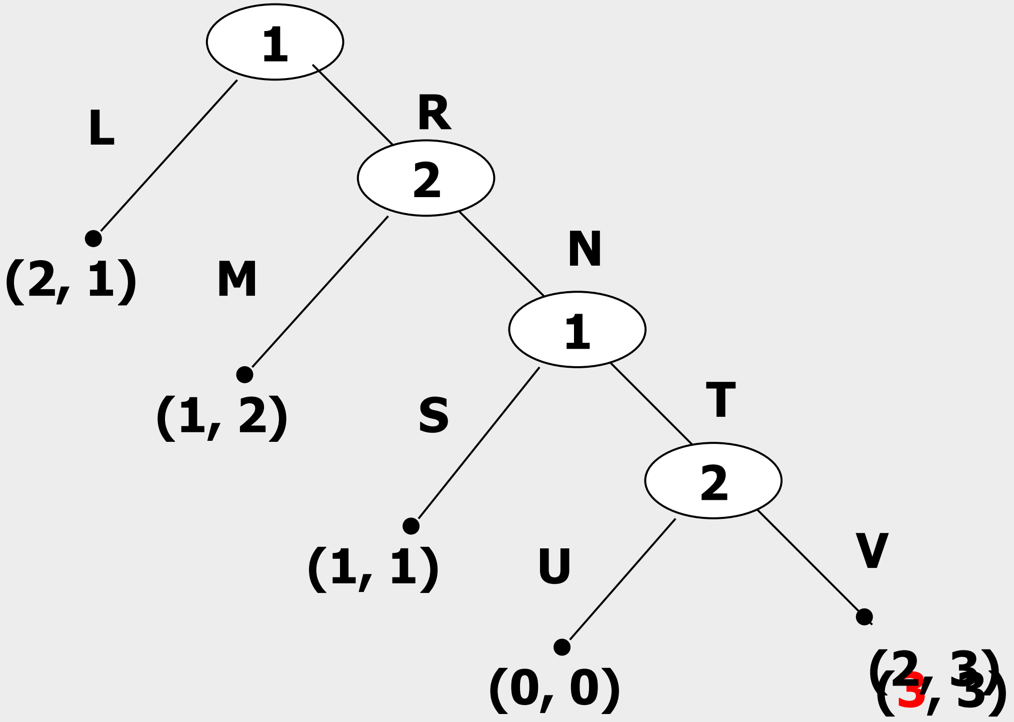
- 逆推归纳法只能分析明确设定的博弈问题，要求博弈的结构，包括次序、规则和得益情况等都非常清楚，并且各个博弈方了解博弈结构，相互知道对方了解博弈结构。这些可能有脱实际的可能
- 逆推归纳法也不能分析比较复杂的动态博弈，例如象棋
- 在遇到两条路径利益相同的情况时逆推归纳法也会发生选择困难
- 对博弈方的理性要求太高，不仅要求所有博弈方都有高度的理性，不允许犯任何错误，而且要求所有博弈方相互了解和信任对方的理性（所有博弈方的理性是共同知识）

颤抖手均衡

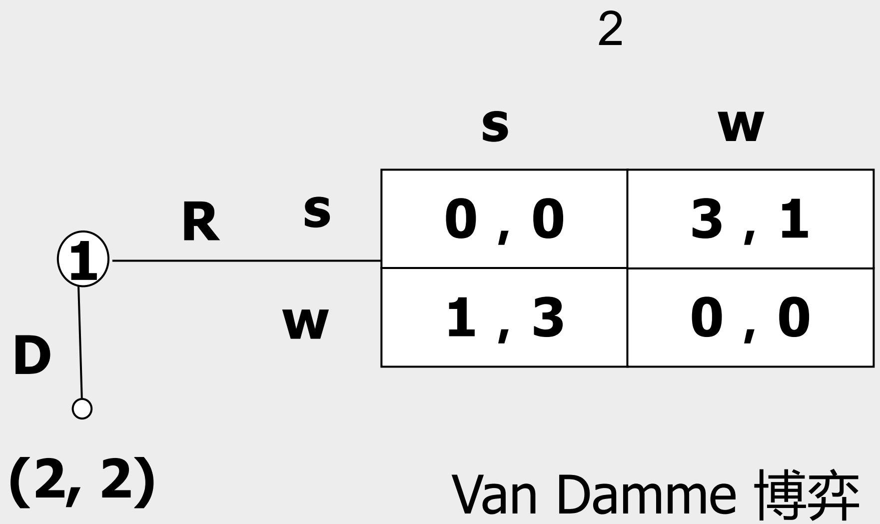
博弈方2

博弈方1		L	R
	U	10, 0	6, 2
	D	10, 1	2, 0

	L	R
U	9, 0	6, 2
D	10, 1	2, 0



顺推归纳法



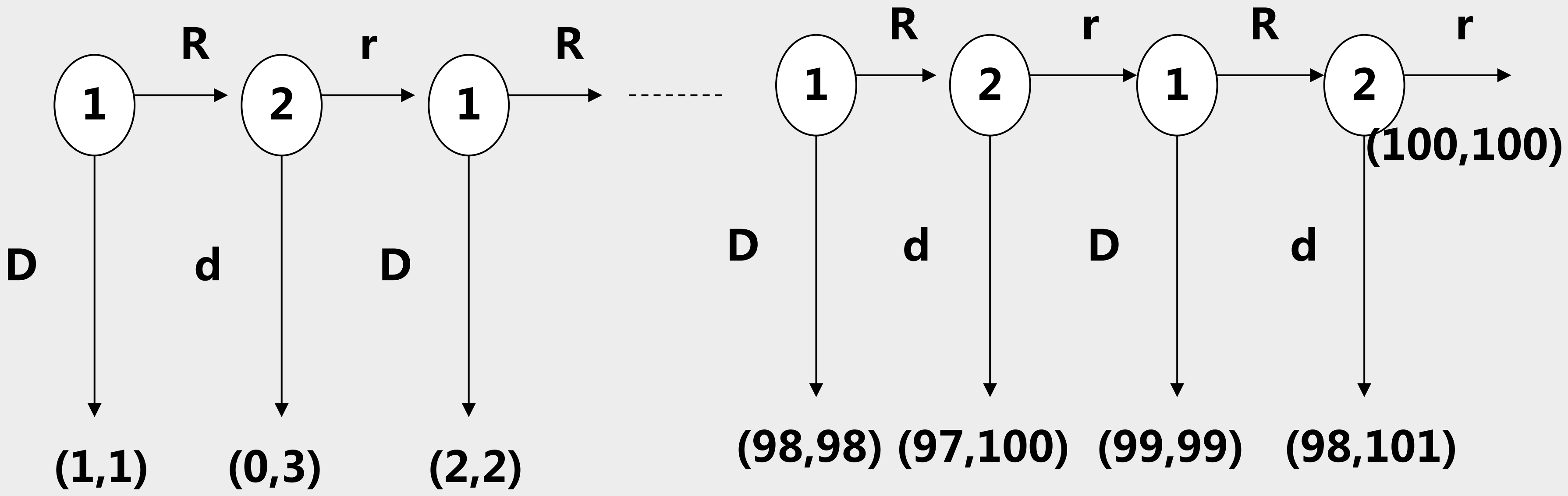
Van Damme 博弈

博弈方2

博弈方1	s	w
D	2 , 2	2 , 2
Rs	0 , 0	3 , 1
Rw	1 , 3	0 , 0

Van Damme 博弈策略形

3.6.3 蜈蚣博弈问题



1
2
1
1
2
1
2
R
r
R
R
r
R
r
D
d
D
D
d
D
d
(1,1)
(0,3)
(2,2)
(98,98)
(97,100)
(99,99)
(98,101)
(100,100)